



# Dynamická analýza lávky v Tróji





## Autoři lávky



Ing. Jan Blažek  
V-CON Ltd.



Ing. Petr Harazim, Ph. D.  
Valbek



Doc.Ing. Lukáš Vráblík, Ph. D.  
Valbek

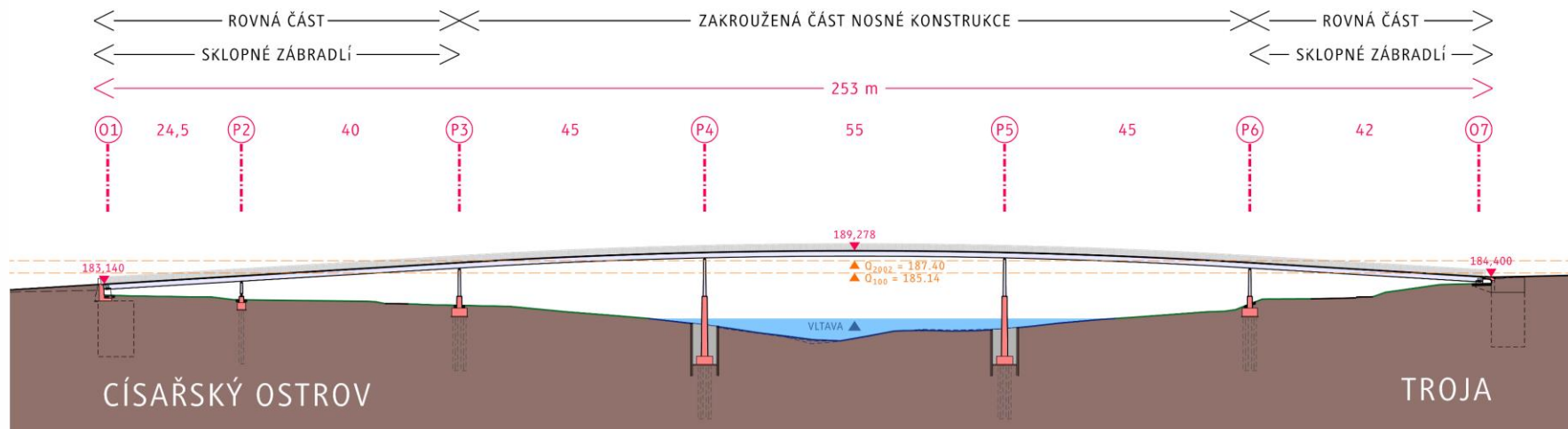


## Obsah

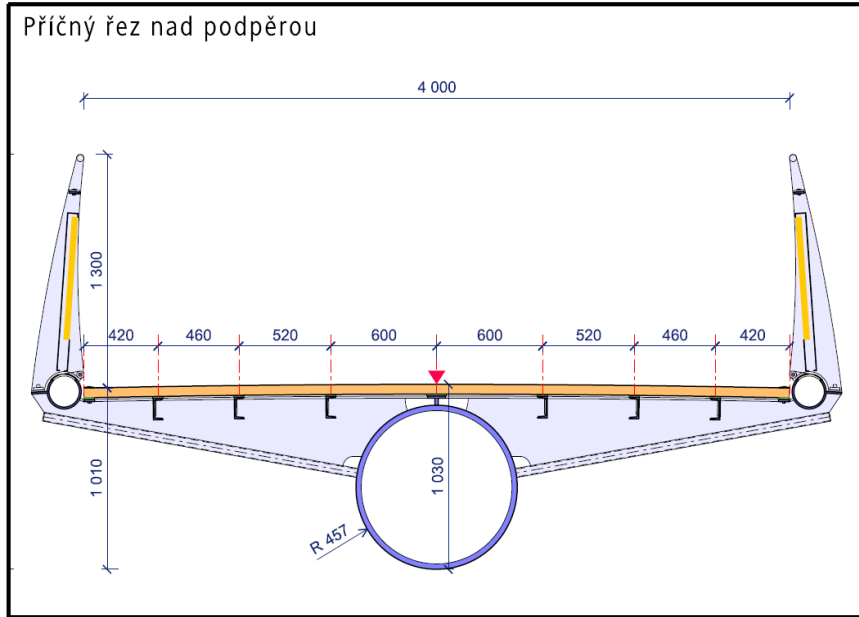
- Konverze zatížení do hmoty
- Analýza vlastních tvarů konstrukce
- Ověření kritérií komfortu chodců
- Dynamické zatížení vyvolané chodci
- Proporcionální tlumení konstrukce
- Lineární časově závislá analýza - modální
- Ověření kritérií zrychlení konstrukce
- Návrh TMD (Tuned mass damper)
- Lineární časově závislá analýza – přímá integrace
- Interpretace výsledků



## Geometrie lávky



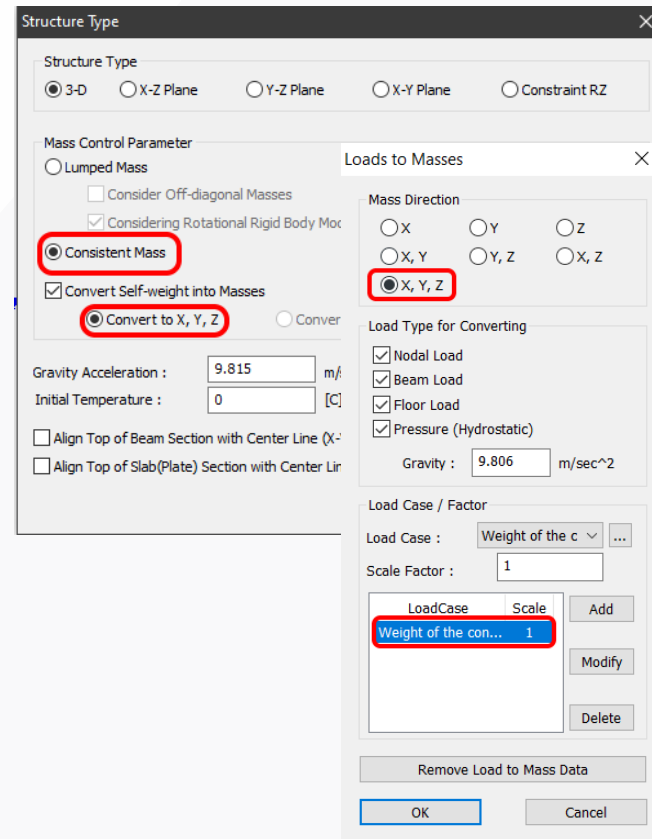
## Příčný řez





## Konverze zatížení do hmoty

- Consistent Mass
- Hmota je rovnoměrně rozložená po elementu
- Přesnější, ale časově náročnější na MKP výpočet





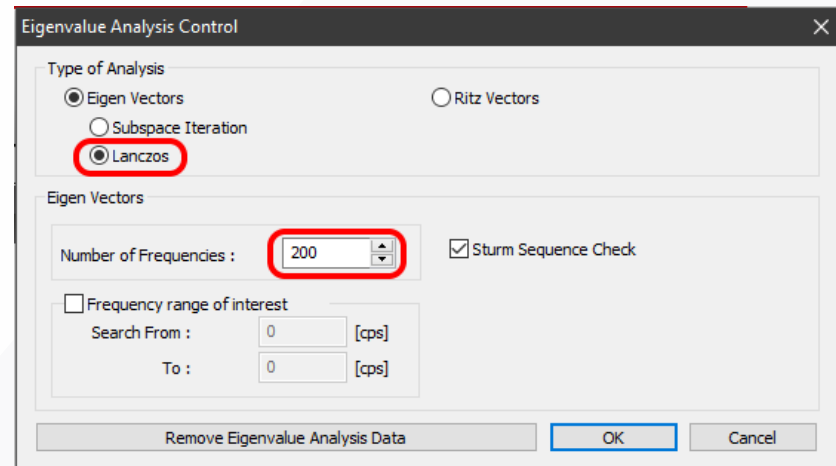
## Modální analýza

- Lanczos
- Počet zvolených vlastních tvarů 200

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0$$

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0$$



Mode 2





## Vlastní frekvence a modální participační faktor

$$\gamma_i = \{\phi\}_i^T [M] \{D\}$$

Mass Matrix

Mode shapes

Excitation Direction Vector

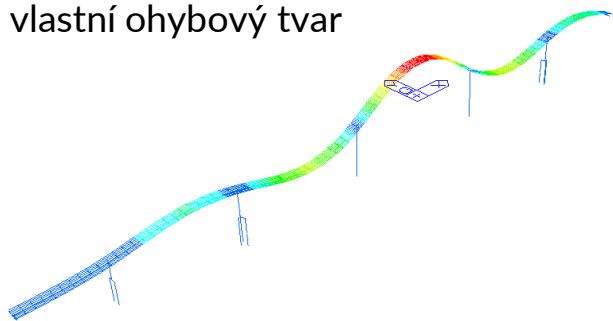
EIGENVALUE ANALYSIS					MODAL PARTICIPATION FACTOR PRINTOUT (KN.m)						
Mode No	Frequency (rad/sec)	Frequency (cycle/sec)	Period (sec)	Tolerance	Mode No	TRAN-X Value	TRAN-Y Value	TRAN-Z Value	ROTN-X Value	ROTN-Y Value	ROTN-Z Value
1	5.100400	0.811754	1.231868	3.365e-0	1	0.02	0.00	3.36	0.00	-0.00	0.00
2	5.540855	0.881854	1.130074	3.365e-0	2	0.00	4.24	-0.00	0.02	-0.00	0.02
3	5.971001	0.950314	1.052265	3.365e-0	3	18.88	0.00	-0.14	0.00	-0.12	0.00
4	7.080560	1.126906	0.887385	3.365e-0	4	2.31	0.00	1.11	0.00	-0.01	0.00
5	7.350651	1.169892	0.854779	3.365e-0	5	-0.00	1.18	-0.00	0.01	0.00	0.17
6	8.137209	1.295077	0.772155	3.365e-0	6	-0.00	3.93	-0.00	-0.00	0.00	0.05
7	8.246104	1.312408	0.761958	3.365e-0	7	0.63	0.00	1.90	-0.00	-0.00	0.00
8	8.987554	1.430414	0.699098	3.365e-0	8	-0.00	12.26	0.00	0.02	0.00	0.03
9	10.340234	1.645699	0.607644	3.365e-0	9	-0.00	9.64	0.00	0.01	0.00	-0.01
10	10.635118	1.692632	0.590796	3.365e-0	10	0.05	-0.00	7.48	0.00	-0.00	-0.00
11	11.888223	1.892070	0.528522	3.365e-0	11	-0.16	0.00	10.32	-0.00	0.00	-0.00
12	16.008940	2.547902	0.392468	3.365e-0	12	-0.00	-0.01	-0.00	0.00	0.00	0.03
13	18.893401	3.006978	0.332560	3.365e-0	13	0.00	1.91	-0.00	-0.01	-0.00	0.02
14	18.897464	3.007625	0.332488	3.365e-0	14	-0.40	0.00	0.77	-0.00	0.00	0.00
15	19.343341	3.078588	0.324824	3.365e-0	15	-0.00	3.92	-0.00	0.01	0.00	-0.21
16	19.963052	3.177218	0.314741	3.365e-0	16	-0.00	5.36	-0.00	-0.01	0.00	-0.21
17	21.624251	3.441606	0.290562	3.365e-0	17	-0.00	0.00	5.56	-0.00	-0.00	-0.00
18	23.211415	3.694211	0.270694	3.365e-0	18	0.00	4.42	0.00	-0.16	0.00	0.14
19	24.327360	3.871820	0.258276	3.365e-0	19	0.00	-0.52	-0.00	0.04	-0.00	0.65
20	25.779825	4.102987	0.243725	3.365e-0	20	0.18	-0.00	-0.84	0.00	-0.00	-0.00
21	28.030214	4.461147	0.224158	3.365e-0	21	-0.39	0.00	-2.23	-0.00	-0.00	0.00
22	28.092660	4.471086	0.223659	3.365e-0	22	0.00	5.19	0.00	-0.14	0.00	0.08
23	31.785401	5.058804	0.197675	3.365e-0	23	-0.23	-0.00	0.96	-0.00	-0.00	0.00
24	32.873063	5.231910	0.191135	3.365e-0	24	0.00	1.55	-0.00	-0.03	0.00	0.18
25	34.751802	5.530921	0.180802	3.365e-0	25	5.45	-0.00	0.01	0.00	-0.03	0.00
26	35.485103	5.647630	0.177065	3.365e-0	26	0.05	-0.00	-0.32	0.00	-0.00	0.00
27	35.490693	5.648519	0.177038	3.365e-0	27	0.00	5.06	-0.00	-0.09	-0.00	-0.06
28	36.880056	5.869643	0.170368	3.365e-0	28	-0.74	0.00	0.34	-0.00	0.00	-0.00
29	39.325097	6.258784	0.159775	3.365e-0	29	0.00	0.18	-0.00	0.01	-0.00	-0.55
30	40.431958	6.434946	0.155401	3.365e-0	30	0.34	0.00	1.80	0.00	-0.00	-0.00
31	41.183742	6.554596	0.152565	3.365e-0							
32	41.373296	6.584765	0.151866	3.365e-0							



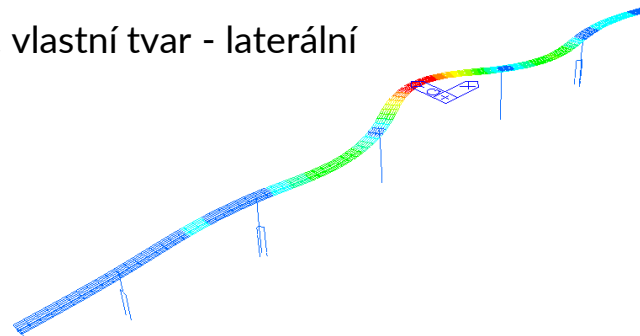


## Vlastní frekvence a modální participací faktor

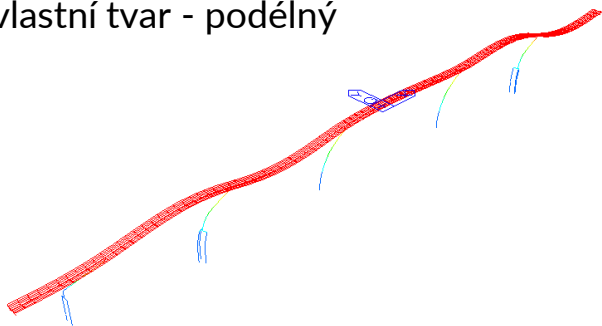
1. vlastní ohybový tvar



2. vlastní tvar - laterální



3. vlastní tvar - podélný

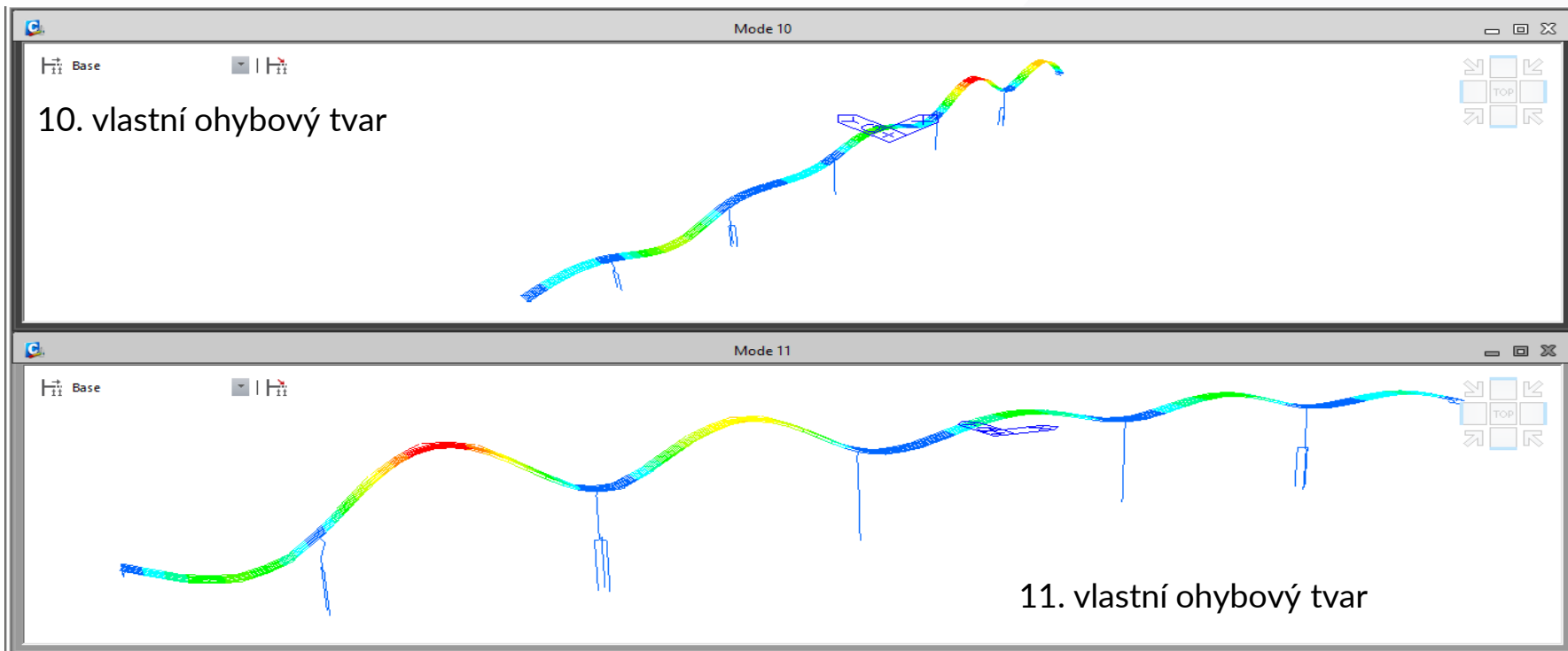


4. vlastní ohybový tvar + podélný





## Vlastní frekvence a modální participační faktor





## Kritický rozsah frekvencí

- for vertical and longitudinal vibrations:

$$1,25 \text{ Hz} \leq f_i \leq 2,3 \text{ Hz}$$

- for lateral vibrations:  $0,5 \text{ Hz} \leq f_i \leq 1,2 \text{ Hz}$

$$f_{i(1)} = 0.811 \text{ Hz} \in \langle 0.5; 1.2 \rangle \text{ -vertikální}$$

$$f_{i(2)} = 0.881 \text{ Hz} \in \langle 0.5; 1.2 \rangle \text{ - laterální}$$

$$f_{i(4)} = 1.269 \text{ Hz} \in \langle 1.25; 2.3 \rangle \text{ -vertikální + podélný}$$

Footbridges with frequencies for vertical or longitudinal vibrations in the range

$$2,5 \text{ Hz} \leq f_i \leq 4,6 \text{ Hz}$$

$$f_{i(10)} = 1.892 \text{ Hz} \notin \langle 2.5; 4.6 \rangle$$

$$f_{i(11)} = 2.54 \text{ Hz} \in \langle 2.5; 4.6 \rangle$$

**Nutno provést podrobnou dynamickou analýzu**



## Kritéria komfortu




*EN 1990 A.2.4.3.2 - a verification of the comfort criteria should be performed if the fundamental frequency of the deck is less than :*

- 5 Hz for vertical vibrations,*
- 2.5 Hz for horizontal (lateral) and torsional vibrations*

Comfort class	Degree of comfort	Vertical $a_{\text{limit}}$	Lateral $a_{\text{limit}}$
CL 1	Maximum	$< 0,50 \text{ m/s}^2$	$< 0,10 \text{ m/s}^2$
CL 2	Medium	$0,50 - 1,00 \text{ m/s}^2$	$0,10 - 0,30 \text{ m/s}^2$
CL 3	Minimum	$1,00 - 2,50 \text{ m/s}^2$	$0,30 - 0,80 \text{ m/s}^2$
CL 4	Unacceptable discomfort	$> 2,50 \text{ m/s}^2$	$> 0,80 \text{ m/s}^2$

## Harmonické zatížení chodci

Table 4-3: Pedestrian traffic classes and densities

Traffic Class	Density $d$ ( $P$ = pedestrian)	Description	Characteristics
TC 1*)	group of 15 P; $d=15 P / (BL)$	Very weak traffic	( $B$ =width of deck; $L$ =length of deck)
TC 2	$d = 0,2 P/m^2$	Weak traffic 	Comfortable and free walking Overtaking is possible Single pedestrians can freely choose pace
TC 3	$d = 0,5 P/m^2$	Dense traffic 	Still unrestricted walking Overtaking can intermittently be inhibited
TC 4	$d = 1,0 P/m^2$	Very dense traffic 	Freedom of movement is restricted Obstructed walking Overtaking is no longer possible
TC 5	$d = 1,5 P/m^2$	Exceptionally dense traffic	Unpleasant walking Crowding begins One can no longer freely choose pace

$$F_{vert}(t) = G + \sum_{n=1}^3 \Delta G_n \sin(n \cdot 2\pi f_w t - \varphi_n)$$

$$F_{lat}(t) = G \sum_{n=1}^n \Delta a_n \sin(n \cdot \pi f_w t - \varphi_n)$$

$$F_{long}(t) = G \sum_{n=1}^n \Delta a_n \sin(n \cdot 2\pi f_w t - \varphi_n)$$

	G [N]			$n' [1/m^2]$
	Vertical	Longitudinal	Lateral	
	280	140	35	$\frac{10,8\sqrt{\xi \times n}}{S}$



## Harmonické zatížení chodci

Add/Modify Time History Load Cases

General

Name : **Fr2-spojite** Description :

Analysis Type : ☒ Linear ☐ Nonlinear

Analysis Method : ☒ Modal ☐ Direct Integration ☐ Static

Time History Type : ☐ Transient ☒ Periodic

End Time : 30 sec Time Increment : 0.01 sec

Step Number Increment for Output : 1

Order in Sequential Loading :

☐ Subsequent to : ☐ Load Case ☐ Initial Element Forces (Table) ☐ Initial Forces for Geometric Stiffness

☐ Cumulate D/N/A Results ☐ Keep Final Step Loads Constant

Geometric Nonlinearity Type

☒ None ☐ Large Displacements

Damping

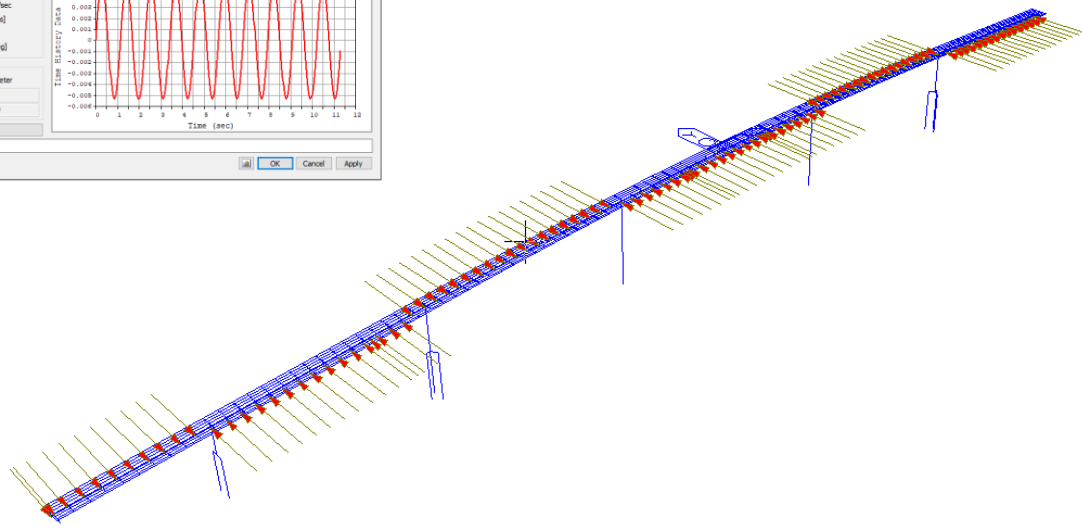
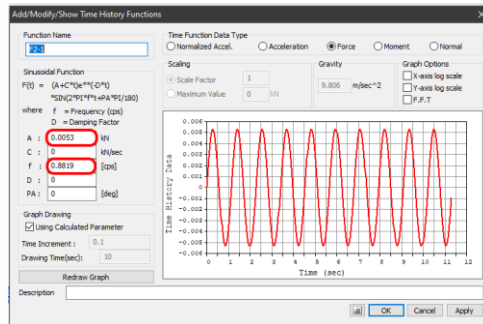
Damping Method : Modal

Direct Specification of Modal Damping

Damping Ratio for All Modes : 0.004

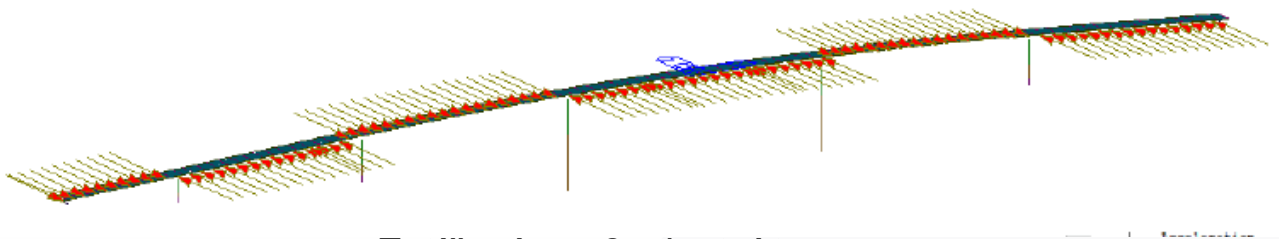
Modal Damping Overrides

Mode	Damping Ratio
1	

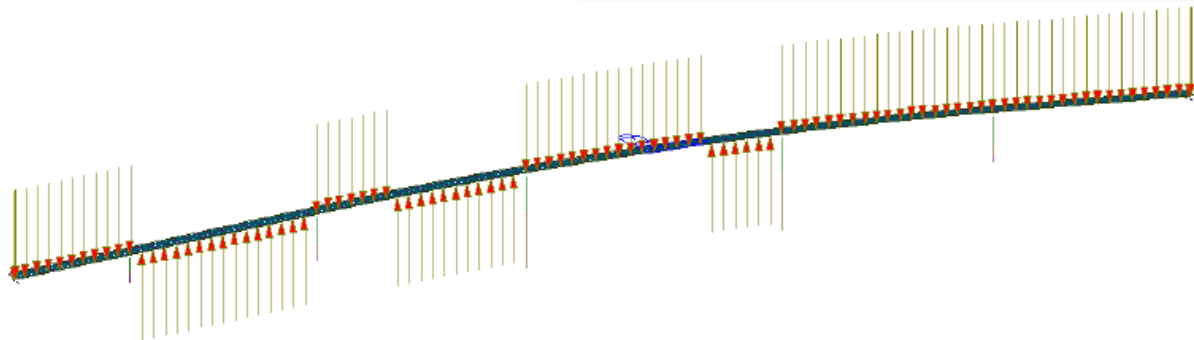




## Harmonické zatížení, které vyvolávají kritické zrychlení



Zatížení pro 2. vlastní tvar



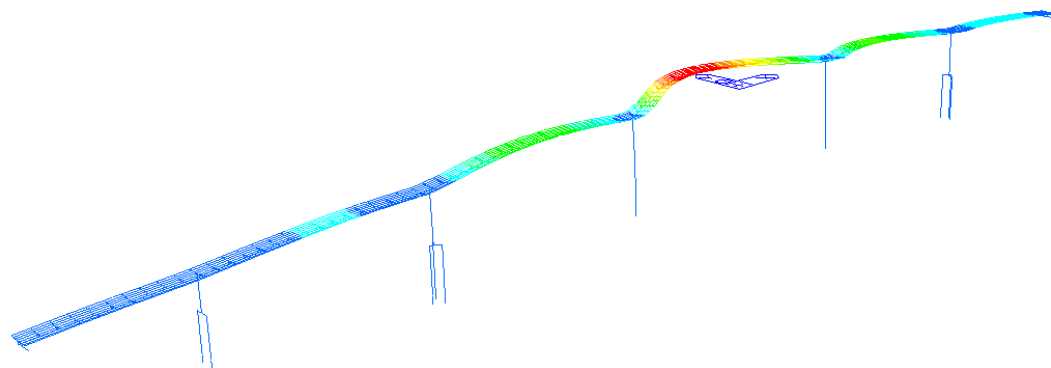
Zatížení pro 10. vlastní tvar



## Harmonické zatížení, které vyvolávají kritické laterální zrychlení

2. vlastní tvar laterální + periodické zatížení

Base



MIDAS/Civil
POST-PROCESSOR
DISPLACEMENT
Acceleration
RESULTANT
1.27483e-001
1.15894e-001
1.04304e-001
9.27149e-002
8.11255e-002
6.95362e-002
5.79468e-002
4.63574e-002
3.47681e-002
2.31787e-002
1.15894e-002
0.00000e+000
SCALEFACTOR=
9.9057E+001
THALL: FR2-DAV
MAX : 1685
MIN : 1947
FILE: BEZ TLUMEN-
UNIT: m/sec^2
DATE: 09/16/2021
VIEW-DIRECTION
X:-0.684
Y:-0.661
Z: 0.309

$$a_{(2)} = 0.127 \text{ m/sec}^2 \in <0.1; 3>$$

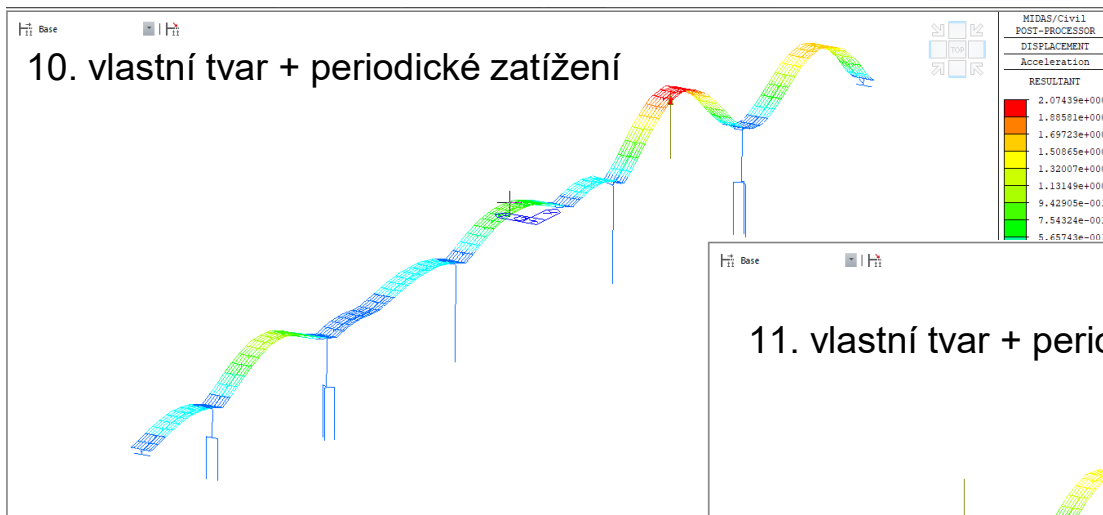
Není nutno tlumit konstrukci v laterálním směru !!!





## Harmonické zatížení, které vyvolávají kritické vertikální zrychlení

10. vlastní tvar + periodické zatížení



$$a_{(10)} = 2.07 \text{ m/sec}^2 \notin <0.5;1>$$

$$a_{(11)} = 2.77 \text{ m/sec}^2 \notin <0.5;1>$$

11. vlastní tvar + periodické zatížení



**Je nutné navrhnout TMD !!!**



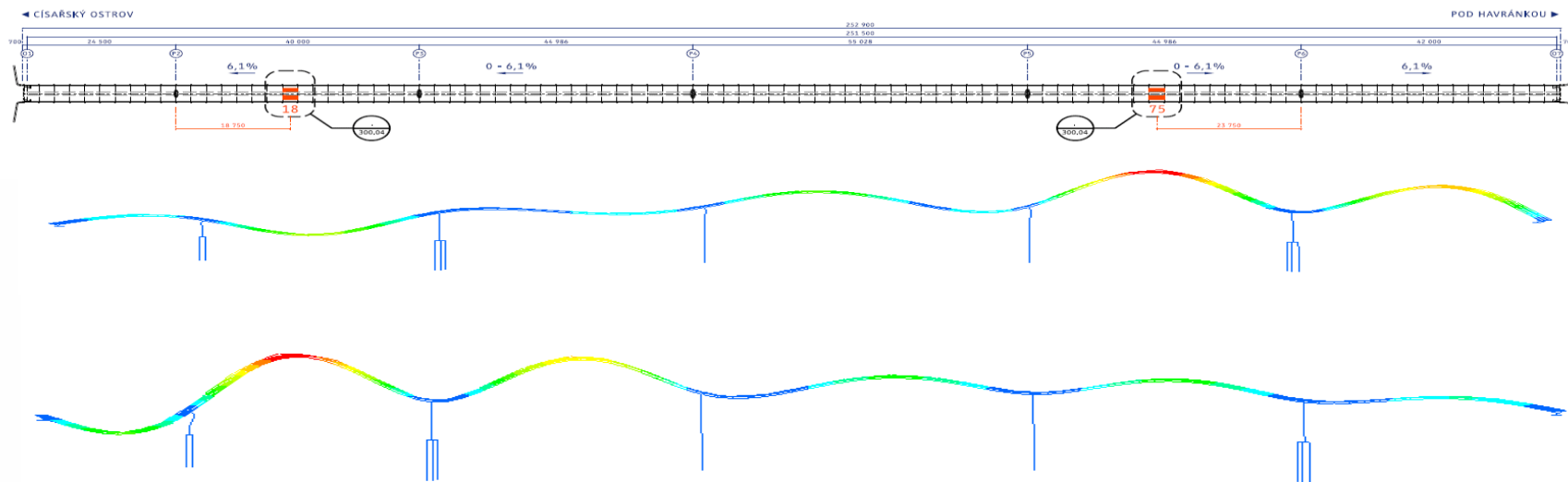
## Hmotnostní tlumič TMD

- Koncentrovaná hmota je umístěn v místě extrémního rozkmitu
- Je spojen pomocí pružin a tlumících elementů
- Návrh vychází z rozdělení kritické frekvence do dvou nově vzniklých frekvencí, kde jedna je pod a jedna nad kritickou frekvencí
- Díky to mu dochází k disipaci energie a utlumení celé soustavy



## Umístění tlumiče na mostě

- 2 x TMD jsou umístěny v místech maximální amplitudy pro 10. a 11. vlastní tvar
- Hmotnost tlumiče je 2500 kg





## Návrh TMD

- Poměr hmoty - ( $\mu = m_d/m_s$ )

- Optimální frekvence -  $\delta_{opt} = \frac{1}{1 + \mu}$

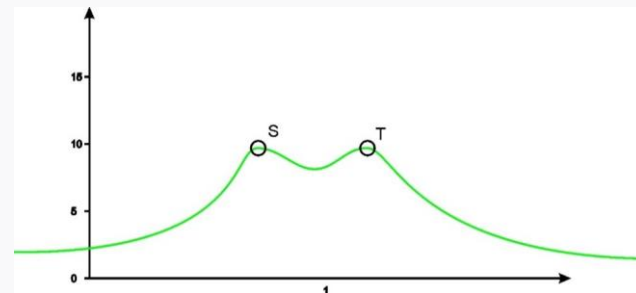
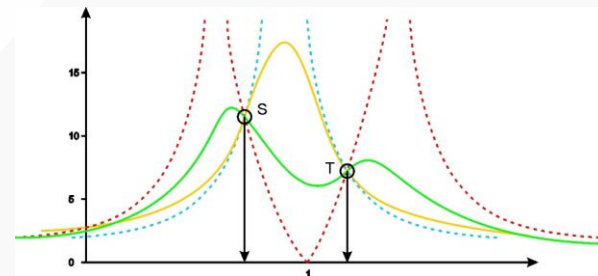
- Optimální relativní tlumení -  $\xi_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}}$

- Konstanta tuhosti pro TMD

$$k_d = (2\pi f_d)^2 m_d$$

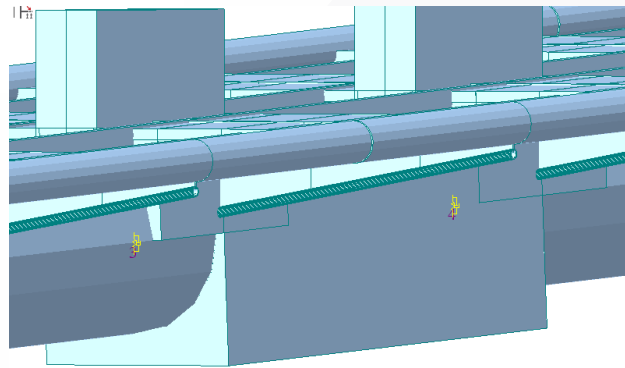
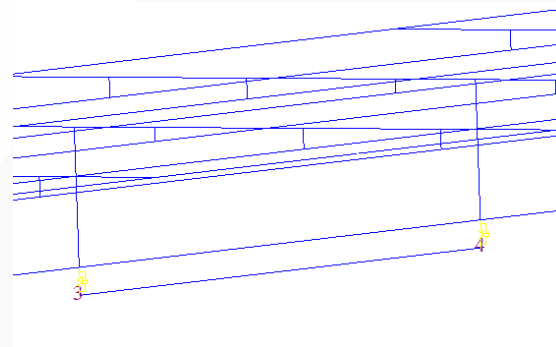
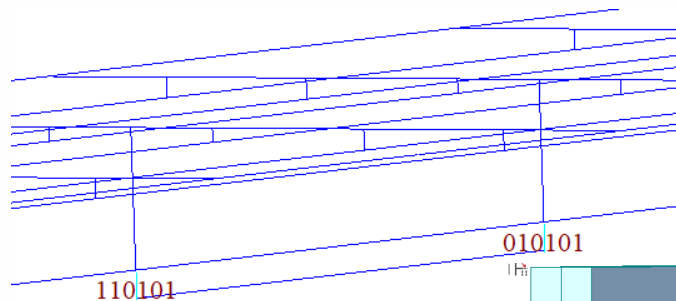
- Konstanta tlumení pro TMD

$$c_d = 2m_d(2\pi f_d)\xi_{opt}$$





## TMD v midas Civil





## Tuhosti a tlumení pro TMD

- Hmota TMD je v elementu

Add/Modify General Link Properties

Name : TumiP6-P7

Description : Nevim

Application Type

☒ Element Type 1 ☐ Force Type : Boundary Nonlinear Analysis

Property Type : Spring and Linear Dashpot

☐ Element Type 2 : Seismic Control Devices

Seismic Control Devices Type : Viscous Damper / Oil Damper

Seismic Control Devices Properties :

Self Weight

Total Weight : 0 kN

Lumped Weight Ratio : I-end : J-end = 0.5 : 0.5

☐ Use Mass

Total Mass : 0 kN/g

Lumped Mass Ratio : I-end : J-end = 0.5 : 0.5

Linear Properties

DOF	Stiffness	Damping
<input checked="" type="checkbox"/> Dx	129.5522 kN/m	3.084746 kN*sec/m
<input type="checkbox"/> Dy	0 kN/m	0 kN*sec/m
<input type="checkbox"/> Dz	0 kN/m	0 kN*sec/m
<input type="checkbox"/> Rx	0 kN*m/[rad]	0 kN*m*sec/[rad]
<input type="checkbox"/> Ry	0 kN*m/[rad]	0 kN*m*sec/[rad]
<input type="checkbox"/> Rz	0 kN*m/[rad]	0 kN*m*sec/[rad]

Nonlinear Properties

DOF

☐ Dx Properties...

☐ Dy Properties...

☐ Dz Properties...

☐ Rx Properties...

☐ Ry Properties...

☐ Rz Properties...

Tree Menu

Node Element Boundary Mass Load

General Link

Boundary Group Name : Default

Options

☒ Add ☐ Delete

General Link Data

General Link Property

Name : TumiP6-P7

Type : Spring and Linear Dashpot

☐ Inelastic Hinge Property

Name :

Reference Coordinate System

☒ Element ☐ Global

Input Method

☒ Beta Angle

☐ Ref. Point

☐ Ref. Vector

0 [deg]

2 Nodes :

☐ Copy General Link

☐ Node Inc. ☐ Distance

Axis : ☒ x ☐ y ☐ z

Distances : m

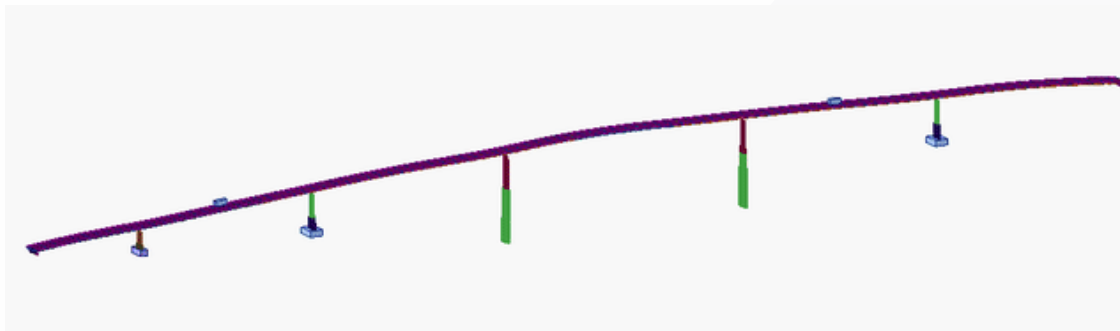
(Example : 5, 3, 4.5, 365.0)

Apply Close



## Časově závislá analýza – přímá integrace a proporcionální tlumení

- Implicitní Newmarkova metoda přímé integrace
- Nelze použít modální superpozici
- Proporcionální tlumení



Add/Modify Time History Load Cases

General  
Name: Tr10-spoite Description:

Analysis Type: ☒ Linear ☐ Nonlinear  
Analysis Method: ☐ Modal ☒ Direct Integration  
Time History Type: ☒ Transient ☐ Periodic

End Time: 30 sec Time Increment: 0.01 sec  
Step Number Increment for Output: 1

Order in Sequential Loading:   
☐ Subsequent to:   
    ☐ Load Case   
    ☐ Initial Element Forces (Table)   
    ☐ Initial Forces for Geometric Stiffness   
☐ Cumulate D/V/A Results ☐ Keep Final Step Loads Constant

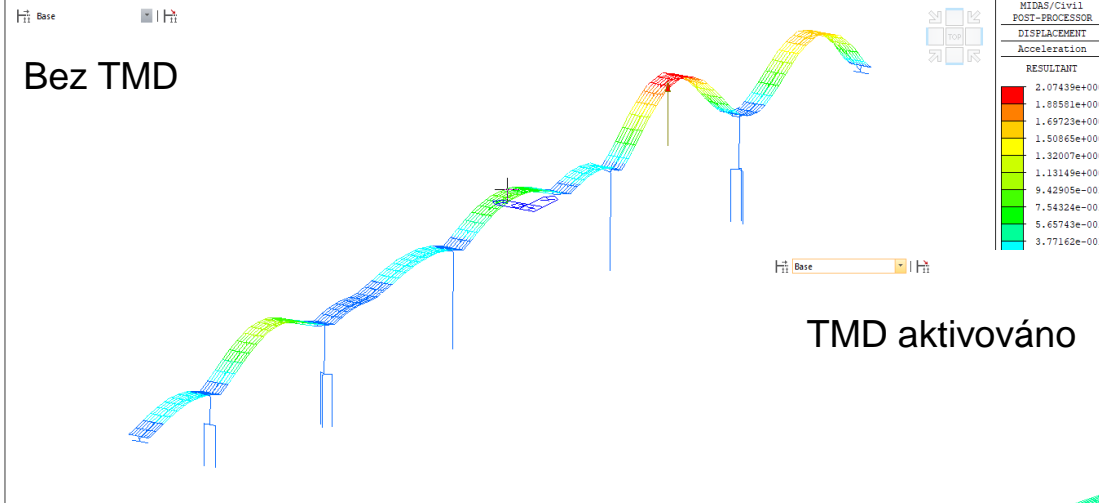
Geometric Nonlinearity Type:   
☒ None ☐ Large Displacements

Damping  
Damping Method: Mass & Stiffness Proportional  
Mass and Stiffness Coefficients  
Damping Type: ☒ Mass Proportional ☒ Stiffness Proportional  
☐ Direct Specification: 0 0  
☒ Calculate from Modal Damping: 0.03715745237 0.00042370701  
Coefficients Calculation  
☒ Frequency [Hz]: 1.3124 1.6926  
☐ Period [sec]: 0 0  
Damping Ratio: 0.004 0.004  
Show Damping Ratio ...

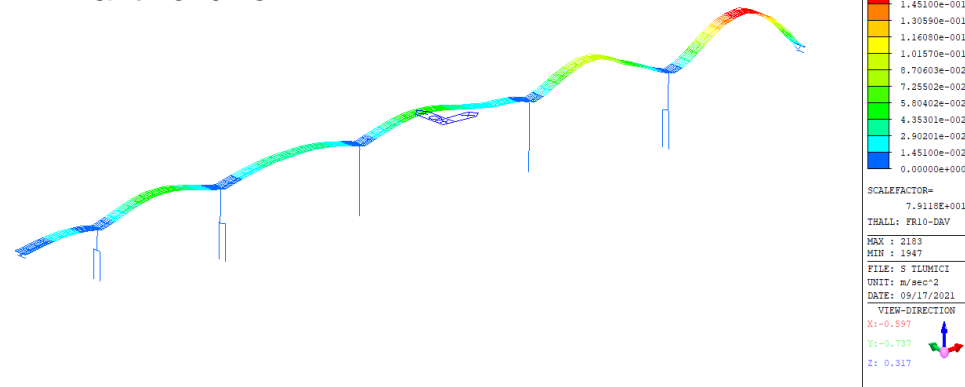
Time Integration Parameters  
Newmark Method: Gamma 0.5 Beta 0.25  
☒ Constant Acceleration ☐ Linear Acceleration ☐ User Input



## Zrychlení pro-10. vlastní tvar



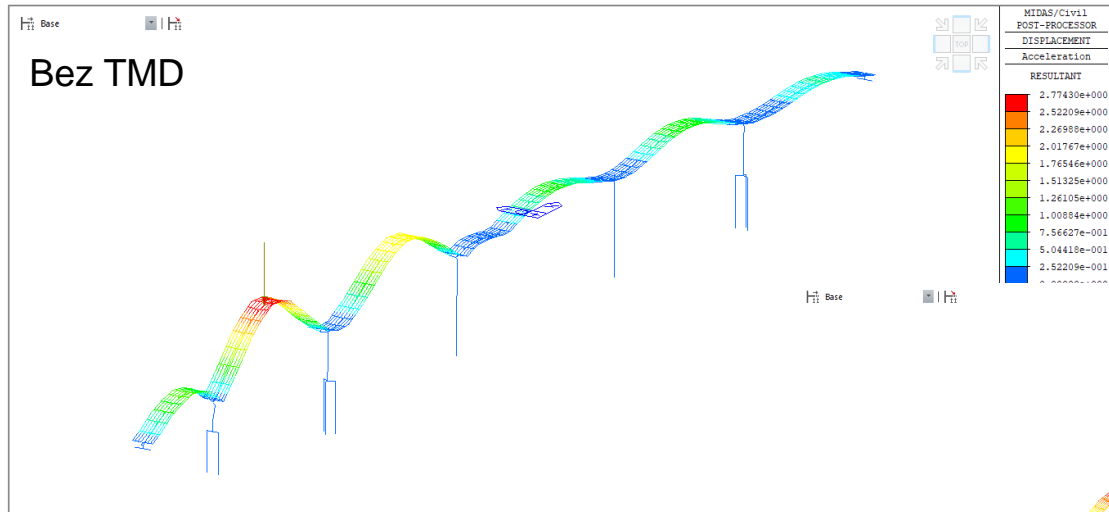
TMD aktivováno



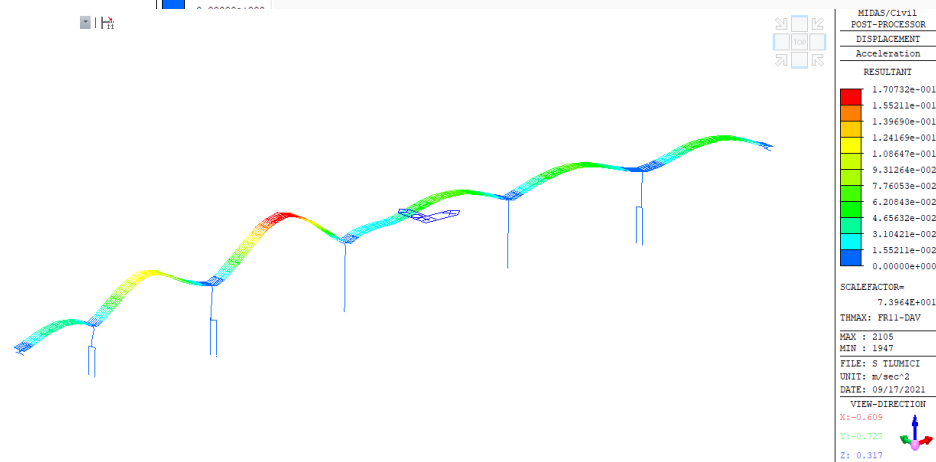




## Zrychlení pro-11. vlastní tvar

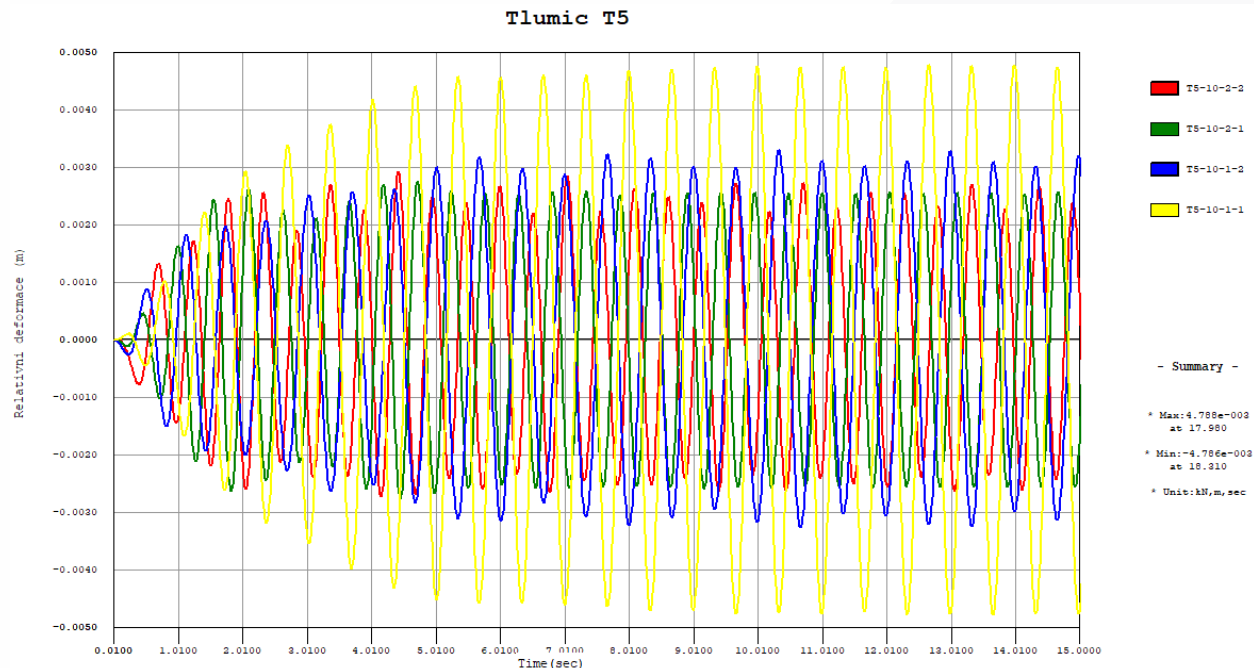


TMD aktivováno





## Relativní posun tlumiče T5 vůči nosné konstrukci





Q&A